

05/04/16.

$$\in \mathbb{R}^3 \quad (\pi_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 = 0, (A_1, B_1, \Gamma_1) \neq (0, 0, 0)$$

$$(\pi_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2 = 0, (A_2, B_2, \Gamma_2) \neq (0, 0, 0)$$

$$\textcircled{1} \text{ Τα } \pi_1 / \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 = (A_2, B_2, \Gamma_2) \perp (\pi_2)$$

(A₁, B₁, Γ₁) $\perp$ (π₁)

$$\Leftrightarrow \vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2, \lambda \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow A_1 = \lambda A_2, B_1 = \lambda B_2, \Gamma_1 = \lambda \Gamma_2$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \lambda$$

(ω νοησιος ποσων = 0 $\rightarrow$ $\lambda \neq 0$)
 αντιστοιχος οριζων = 0

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

② Τα επιπεδα (π₁)/(π₂) να ταυτίζονται αν
 : αν: (π₁) = (π₂) $\Rightarrow$ ταυτίζονται τους άξονες
 στα ίδια σημεία

$$\pi_1 \equiv "x" \left(-\frac{\Delta_1}{A_1}, 0, 0\right), "y" \left(0, -\frac{\Delta_1}{B_1}, 0\right), "z" \left(0, 0, -\frac{\Delta_1}{\Gamma_1}\right)$$

$$\pi_2 \equiv "x" \left(-\frac{\Delta_2}{A_2}, 0, 0\right), "y" \left(0, -\frac{\Delta_2}{B_2}, 0\right), "z" \left(0, 0, -\frac{\Delta_2}{\Gamma_2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \lambda \in \mathbb{R}^*$$

③ Τα (π₁), (π₂) τέμνονται ή όχι παράλληλα και
 δύο εδωκινται. όπου:

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \text{ ή } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \text{ ή } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$$

$$\textcircled{*} \text{ Δύο επιπεδα να τέμνονται υποδηλώνει } \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$$

(A₁, B₁, Γ₁) (A₂, B₂, Γ₂)

$$\Leftrightarrow \lambda \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + \Gamma_1 \Gamma_2 = 0$$

υπομνησμοσ αλγεβρα βωθων
 υποβοηθησ 2 επιπεδων

$$\begin{aligned} (\pi_1): & A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0 \\ & // \quad \neq \\ & A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_2 = 0 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{για να είναι //} \\ \text{πρέπει } \Delta_1 \neq \Delta_2 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\pi_1) : A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0 \\ (\pi_2) : A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0 \\ (\pi_3) : A_3 x + B_3 y + \Gamma_3 z + \Delta_3 = 0 \\ (\pi_4) : A_4 x + B_4 y + \Gamma_4 z + \Delta_4 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{in total 4} \\ \text{equations in 3} \\ \text{variables} \end{array}$$

Πότε τα $(\pi_1), (\pi_2), (\pi_3)$ έχουν συνολικά ένα κοινό σημείο;

Όταν το (2) έχει μοναδική λύση $(\Rightarrow \det S \neq 0)$.

$$\begin{aligned} r(A) &= 3 \\ r(A|B) &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Πότε το (π_4) διαφεύκει από το μοναδικό κοινό σημείο (δηλαδή το ότι τα $(\pi_1), (\pi_2), (\pi_3)$ έχουν μοναδική λύση);

$\Rightarrow$ το (2') έχει λύση (είναι συμβατό);

$$\left[\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & \Gamma_1 & \Delta_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 & \Delta_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 & \Delta_3 \\ A_4 & B_4 & \Gamma_4 & \Delta_4 \end{array} \right]$$

$A|B$

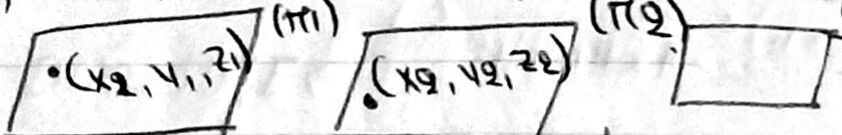
$$\Leftrightarrow r(A) = r(A|B) = 3$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

Εφαρμογή: Είμαστε δεδομένοι σημείοι.

Εστω $(\pi_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 = 0$.

$(\pi_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2 = 0, \Delta_1 \neq \Delta_2$.

Φοινιάζει $(\pi) \parallel (\pi_1), (\pi_2)$, τότε να βρούμε
στο λόγο αυτόν 

Γενική Είσαγωγή σημείοι: $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$.

$(\pi): A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1 \neq 0$, βρούμε η είσαγωγή του Δ_3

Στην ομοία $(\pi) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2} \right)$

$\Rightarrow$ οι P_1, P_2 σημεία του $(\pi_1), (\pi_2)$ αντιστοίχως $\Rightarrow$

το σημείο $P\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ είναι σημείο του (π)

$\Rightarrow A_1\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + B_1\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right) + \Gamma_1\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) + \Delta_3 = 0$.

$\Rightarrow \frac{1}{2} (A_1x_1 + B_1y_1 + \Gamma_1z_1) + \frac{1}{2} (A_2x_2 + B_2y_2 + \Gamma_2z_2) + \Delta_3 = 0$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{-A_1, \text{ οπότε } P_1 \in (\pi_1)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{-A_2, \text{ οπότε } P_2 \in (\pi_2)}$

Γωγία διανυσμάτων: (εστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \neq 0$)
 Cauchy-Schwarz $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$
 $|\vec{x} \cdot \vec{y}|$

$$-1 \leq \frac{|\vec{x} \cdot \vec{y}|}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} \leq 1 \rightarrow \exists \theta \in [0, \pi] : \cos \theta = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}, \hat{\theta} = (\vec{x}, \vec{y})$$

Γωγία επιπέδων π_1, π_2 ορίζεται ως η μικρότερη
 διέδρα γωγία που σχηματίζεται από την τομή
 των π_1, π_2 .

$$(\pi_1): A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0 \rightarrow \vec{n}_1 = (A_1, B_1, \Gamma_1) \perp (\pi_1)$$

$$(\pi_2): A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0 \rightarrow \vec{n}_2 = (A_2, B_2, \Gamma_2) \perp (\pi_2)$$

$$\text{Γωγία } (\pi_1, \pi_2): \hat{\theta} : \cos \theta = \frac{|\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle|}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + \Gamma_1 \Gamma_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + \Gamma_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + \Gamma_2^2}}$$

προφανώς $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + \Gamma_1 \Gamma_2 = 0$.

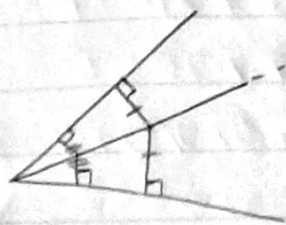
Εφαρμογή: Είλεγμα "δικοτομικών" επιπέδων.

$$(\pi_1) A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0$$

$$(\pi_2) A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0$$

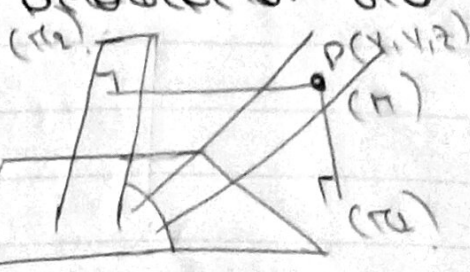
$$(\pi) \{A x + B y + \Gamma z + \Delta = 0\};$$

το (π) να δικοτομεί την γωγία
 των $(\pi_1)(\pi_2)$.



Ιδιότητα δικοτομίας είναι ότι τα
 επίπεδα της ισοπέρας από τις
 πλευρές της γωγίας.

$\Downarrow$
 υποτεθείτε στο αντίθετο:



$$\Rightarrow d(P_0, (\pi_1)) = d(P_0, (\pi_2)) \Leftrightarrow$$

$$\frac{A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z + \Delta_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + \Gamma_1^2}} = \pm \frac{A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + \Gamma_2^2}}$$

Επιλέγουμε τω επιπέδων που διχοτομεί τμήματα των $(\pi_1), (\pi_2)$

*
① Δινοτικοι επιπέδων $(\pi_1): x + 2y + 3z - 4 = 0$
 $(\pi_2): 5x + z - 3 = 0.$

Παρατηρούμε ότι τα $(\pi_1), (\pi_2)$ τέμνονται,

αφού $\frac{1}{5} = \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{3}{1}.$

$\Rightarrow$ οι επιπέδων τα δικά $(\pi): \frac{x + 2y + 3z - 4}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \pm \frac{5x + z - 3}{\sqrt{5^2 + 0^2 + 1^2}}$

② $(\pi_1): x + 2y - 3z + 1 = 0.$

$(\pi_2): 2x + y - z + 3 = 0, \delta \text{ικά} (\pi)$ που

διχοτομεί τμήματα διεδομένων χωρίων λόγω βρεθεί ονομα βρεθείται το σημείο $P(1, 1, 1).$

Το $P(1, 1, 1) \in (\pi_1) \leftarrow$ άρα είναι μέλος.

υπό $1 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 1 = 1 \neq 0.$

Επίσης $P(1, 1, 1) \in (\pi_2)^+$ υπό $2 \cdot 1 + 1 - 1 + 3 = 5 \neq 0.$

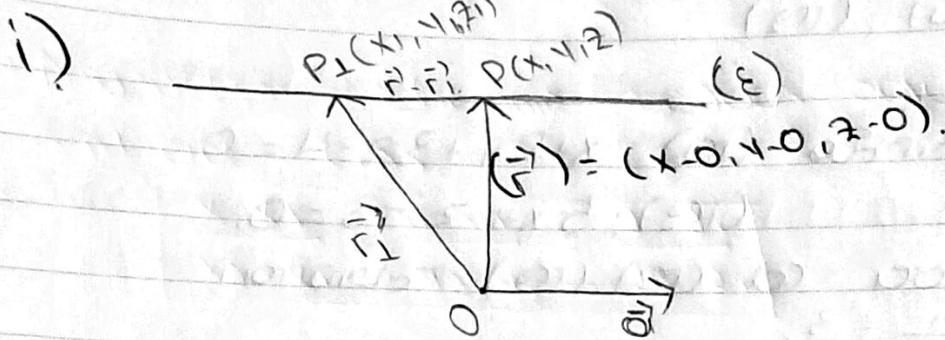
$\Rightarrow$ m επιπέδων είναι $\frac{x + 2y - 3z + 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{2x + y - z + 3}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}}.$

ΕΥΘΕΙΑ

Μια ευθεία προσδιορίζεται πλήρως αν γνωρίζουμε

→ i) ένα σημείο της και ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία.

→ ii) δύο σημεία αυτής.



Έστω τυχαίο $P(x, y, z) \in (E)$.

$$(\vec{r} - \vec{r}_1 = \vec{OP} - \vec{OP}_1 = \vec{r} - \vec{r}_1) \quad \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ O \quad A \quad B \\ \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} \end{array}$$

$\Rightarrow \vec{r} - \vec{r}_1, \vec{d}$ είναι παράλληλα (συγκολλητικά)

$\exists k \in \mathbb{R}^* : \vec{r} - \vec{r}_1 = k \cdot \vec{d} \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_1 + k \vec{d}$ όπου $\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{d}$ παράλληλα.

$$k(\vec{r} - \vec{r}_1) \times \vec{d} = \vec{0}$$

Διανυσματική Εξίσωση

Ευθείας που διέρχεται

από σημείο και είναι παράλληλο σε διάνυσμα

Αντικαθιστώντας στην (*) τα $\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{d}$, έχουμε τις παραμέτρους Εξισώσεις της (E).

$$x = x_1 + k \alpha_1$$

$$y = y_1 + k \beta_1, k \in \mathbb{R}^*$$

$$z = z_1 + k \gamma_1$$

Με απαλοιφή των k :

$$\frac{x - x_1}{\alpha_1} = \frac{y - y_1}{\beta_1} = \frac{z - z_1}{\gamma_1}$$

Αναλυτική Εξίσωση Ευθείας

ου $(\text{αντ. } B_1, \mu) \Rightarrow \text{υποκρεωτικό υοι } 0$
 ορισμένη $= 0$, δηλ $x = x_1$.

π.χ

Ευθεία που διέρχονται από $P_1(1, 9, -1)$ υοι
 είναι $\parallel$ στο $(1, 0, -1)$

$\otimes \otimes$ Εου $(1, 0, -1)$ τότε $\frac{x-1}{1} = 0 = \frac{z-(-1)}{-1} \Rightarrow$ $\otimes \otimes$

$$\left\{ \frac{x-1}{1} = \frac{z-(-1)}{-1}, y \neq 9 \right\}$$

π.χ

Ευθεία που διέρχεται από $P_1(1, 9, 9)$ υοι
 είναι $\parallel \vec{a} = (1, 1, 9)$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-9}{1} = \frac{z-9}{9}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$x-1 = y-9$$

$$\parallel$$

$$\boxed{x-y+1=0}$$

$$9(y-9) = z-9$$

$$\parallel$$

$$\boxed{9y-z-9=0}$$

Για να γυρίσω

$$x-y+1=0$$

$$\frac{1}{9}x - \frac{1}{9}y + \frac{1}{9} = 0$$

$$\Rightarrow z=t$$

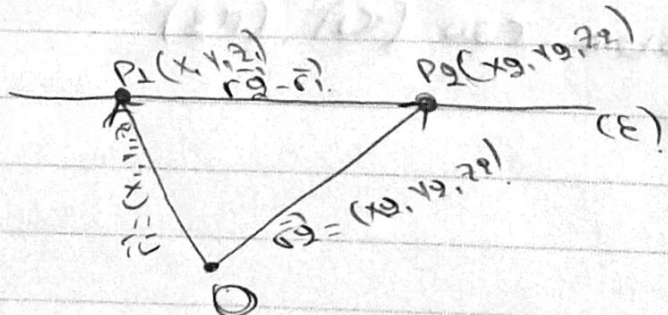
$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \frac{1}{9}t$$

$$x = 0 + \frac{1}{9}t$$

$$z = t$$

ii) Προσδιορίστε ευθεία της οποίας γνωρίζετε
 δύο εμπόδια. (έγω $P_1, P_2 \in (E)$)



Το P_1P_2 είναι
 διάνυσμα της (E) .

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \vec{a}$$

Εμπόδια $\Rightarrow$ γνωρίζουμε/γνωρίζω
 δύο. Ευθεία

$\Rightarrow$ άρα είναι

$$\vec{a} = P_1P_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

- Diagonalisierbar in $\mathbb{R}$ Eigenraum $\mathbb{R}^n$:
 $\vec{v} = \vec{v}_1 + \lambda(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$
- Normalisierter Eigenraum $\mathbb{R}^n$:
 $\lambda =$

• παραμ. $r = r_1 + \kappa(r_2 - r_1)$ Ελάχιστη Ευθεία:

$$x = x_1 + 2(x_2 - x_1)$$

$$y = y_1 + k(y_2 - y_1)$$

$$z = z_1 + k(z_2 - z_1)$$

$$\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{11 - 11}{19 - 11} = \frac{2 - 2}{29 - 21}$$

Παρατηρήσεις : "Ευρεón παρὰ πάντων διακρίβωτος
Ge ευθεία".

$$\bullet \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1} \rightarrow \vec{\alpha} = (a_1, b_1, c_1) \parallel (\varepsilon).$$

Νηροει να δοθεί ως τσίφιν ενινέδω.

$$\bullet \quad (\varepsilon) = \left\{ \underset{\substack{\text{I} \\ (\pi_1)}}{A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0}, \underset{\substack{\text{II} \\ (m_2)}}{A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0} \right\}$$

$$\vec{n}_2 = (A, B, C) \perp (\pi_2)$$

$$\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \perp (\pi_2)$$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \parallel \text{GCM to bin } \tau_{\text{EW}}(\tau_1, \tau_2)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \parallel (\varepsilon).$$